

Nombre de factorisations d'un grand cycle

Philippe Biane

ABSTRACT. On donne une démonstration simple d'une formule de Goupil et Schaeffer qui compte le nombre de factorisations d'un cycle de longueur maximale dans S_n en produit de deux permutations de classes de conjugaisons données.

Dans la suite on utilise les notations du livre de MacDonald [M].

Soit $c_{\lambda\mu}^n$ le nombre de factorisations dans S_n d'un cycle de longueur n en un produit de deux permutations de classes de conjugaison λ et μ . La théorie des caractères donne la formule

$$(0.1) \quad c_{\lambda\mu}^\nu = \frac{n!}{z_\lambda z_\mu} \sum_{\rho \vdash n} \frac{\chi_\lambda^\rho \chi_\mu^\rho \chi_\nu^\rho}{\chi_1^n}.$$

pour le nombre de décompositions d'une permutation de classe ν en produit de deux permutations de classes λ et μ . La somme porte sur les partitions de n et les χ^ρ sont les caractères du groupe symétrique, tandis que $z_\lambda = \prod_i \alpha_i! i^{\alpha_i}$ si $\lambda = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}$.

Lorsque $\nu = (n)$, un cycle de longueur maximale, on a $\chi_\nu^\rho = 0$ sauf si ρ est une équerre, c'est-à-dire un diagramme de la forme $1^r(n-r)$, et on obtient

$$(0.2) \quad c_{\lambda\mu}^n = \frac{n}{z_\lambda z_\mu} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r r! (n-1-r)! \chi_\lambda^{1^r(n-r)} \chi_\mu^{1^r(n-r)}.$$

qui est la formule (4) de [GS]. Cet article se poursuit par une analyse combinatoire de cette formule, pour la transformer en une expression ne contenant que des termes positifs. Nous allons suivre une voie plus algébrique et introduire une fonction génératrice pour ces quantités en utilisant les fonctions symétriques p_λ (cf [M]).

On considère la fonction génératrice

$$\psi(x, y) = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\lambda, \mu \vdash n} p_\lambda(x) p_\mu(y) c_{\lambda\mu}^n$$

D'après (0.2) elle est donnée par

$$\psi(x, y) = \sum_n \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r r! (n-1-r)! \sum_{\lambda, \mu \vdash n} \frac{p_\lambda(x) p_\mu(y)}{z_\lambda z_\mu} \chi_\lambda^{1^r(n-r)} \chi_\mu^{1^r(n-r)}.$$

D'après [M] I. (7.6) et I.3 exemple 9, on a

$$\psi(x, y) = \sum_n \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r r! (n-1-r)! s_{(n-r-1|r)}(x) s_{(n-r-1|r)}(y)$$

Les s_λ sont les fonctions de Schur, et $(a|b) = (a+1, 1^b)$ suivant la notation de Frobenius. D'après [M] I.3. exemple 14, on a

$$\prod_i \frac{1+vx_i}{1-ux_i} = 1 + (u+v) \sum_{a,b \geq 0} s_{(a,b)} u^a v^b$$

donc, en utilisant

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} u^k \bar{u}^l e^{-|u|^2} du = \delta_{kl} k!$$

on obtient

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{\prod_i \frac{1-vx_i}{1-ux_i} - 1}{u-v} \right) \left(\frac{\prod_i \frac{1+\bar{v}y_i}{1-\bar{u}y_i} - 1}{\bar{u}-\bar{v}} \right) e^{-|u|^2-|v|^2} dudv \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{\exp(\sum_r \frac{u^r - v^r}{r} p_r(x)) - 1}{u-v} \right) \times \\ &\quad \left(\frac{\exp(\sum_r \frac{\bar{u}^r - (-\bar{v})^r}{r} p_r(y)) - 1}{\bar{u} + \bar{v}} \right) e^{-|u|^2-|v|^2} dudv \end{aligned}$$

(l'intégrale ne converge pas, mais le développement en série des p_λ converge terme à terme). Faisons le changement de variables $u = a+b, v = a-b$, on trouve

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{2}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{\exp(\sum_r \frac{(a+b)^r - (a-b)^r}{r} p_r(x)) - 1}{2b} \right) \times \\ &\quad \left(\frac{\exp(\sum_r \frac{(\bar{a}+\bar{b})^r - (\bar{a}-\bar{b})^r}{r} p_r(y)) - 1}{2\bar{a}} \right) e^{-2|a|^2-2|b|^2} dadb \end{aligned}$$

Or le polynôme $Q(a, b) = (a+b)^r - (a-b)^r$ a tous ses coefficients positifs, par conséquent quand on développe cette expression en termes des $p_\lambda(x)p_\mu(y)$ on trouve des coefficients positifs. Plus précisément, si on note

$$R_\lambda(a, b) = \frac{1}{b} \prod_i \frac{Q_i^{\alpha_i}(a, b)}{i^{\alpha_i} \alpha_i!} = \frac{1}{z_\lambda b} \prod_i Q_{\lambda_i}(a, b)$$

pour $\lambda = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots$, qui est un polynôme homogène de degré $n-1$, alors on a

$$c_{\lambda, \mu}^n = \frac{n 2^{-n-1}}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} R_\lambda(a, b) R_\mu(\bar{b}, \bar{a}) e^{-|a|^2-|b|^2} dadb$$

ou encore, en appelant r_λ^{kl} le coefficient de $a^k b^l$ dans R_λ , (qui est positif) on obtient l'expression

$$c_{\lambda, \mu}^n = n 2^{-n-1} \sum_{k, l} r_\lambda^{kl} r_\mu^{lk} k! l!$$

qui est équivalente à la formule de Goupil et Schaeffer.

References

- [GS] A. Goupil, G. Schaeffer *Factoring N -cycles and counting maps of given genus*. Eur. J. Combinatorics (1998) **19**, 819–834.
- [M] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Second Edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.

CNRS, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
45, RUE D'ULM 75005 PARIS, FRANCE
E-mail address: `Philippe.Biane@ens.fr`